# תרגיל

*. יהיו ע"ע שונים()! בסיסים לתתי מרחב עצמיים . קבוצה בת"ל.*

## רמז

נניח אחרת. נבחר צ"ל הקצר ביותר: , .( בגלל שבחרנו בצ"ל הקצר ביותר). בצ"ל הזה יש ווקטורים עם ערכים עצמיים שונים(למה?)...

# תוצאה

אם ל לפולינום אופייני יש n שורשים שונים אזי A ניתנת ללכסון(כלומר לA יש n ווקטורים עצמיים בת"ל)

## הוכחה

לכל ע"ע(⬄ שורש של פולינום אופייני) יש ווקטור עצמי לפחות אחד ⇦ יש n ווקטורים עצמיים שהם בת"ל כי יש להם ע"ע שונים.

ריבוי אלגברי וגיאומטרי של ע"ע

# הגדרה

יהי ו ע"ע. קיים כך ש ו. נקרא ריבוי אלגברי של ע"ע .

## דוגמה

, ⇦ הוא ע"ע (יחיד) עם ריבוי אלגברי

# הגדרה

יהיו , ע"ע. המספר נקרא ריבוי הגיאומטרי של ע"ע

## דוגמה

, , ⇦ .

## הערה

1. ל ע"ע ו
2. ניתנת ללכסון ⬄ כאשר ע"ע(שונים)

# משפט

יהי . לכל מתקיים

יהי ויהיו ע"ע שונים(כלומר כל השורשים של ב). נבחר בסיסים למרחבים עצמיים ,

נתבונן *ב. S בת"ל (S בסיס ב אם ורק אם A לכסינה). נשלים S עד לבסיס ,*

*נתבונן במטריצה של בבסיס B:*

⇦ ,

## תוצאה

ניתנת ללכסון מעל ⬄ פולינום אופייני מתפרק לגורמים לינאריים ב(⬄ל יש n שורשים ב עם ריבוי) ולכל ע"ע מתקיים

### תרגיל

להוכיח ⇦

### הוכחה ל⇨

# דוגמה

– מטריצה לסיבוב בזווית ב. ננסה ללכסן אותה

⇦ ל אין ע"ע ⇦ A לא ניתנת ללכסון מעל !

### מעל :

⇦ ל יש שני שורשים שונים ⇦ יש 2 ווקטורים עצמיים בת"ל ⇦ A ניתנת ללכסון מעל

פולינומים

שדה. פולינומים מעל (או עם מקדמים ב) ,

אם אזי הוא מקדם הראשי ו. נקרא מקדם חופשי.

ב יש מספר פעולות: מרחב ווקטורי מעל :   
בנוסף יש גם פעולה של כפל פולינומים:

חלוקה של פולינומים

# משפט

יהיו כך ש. אזי קיימים כך ש ו

# משפט (Bezout)

יהי . אם ל אזי ל

## הוכחה

נחלק ב

# הגדרה

יהי ו. אומרים שa הוא שורש של p עם ריבוי אם כך ש.

## הערה

1. אם אזי
2. אם אזי a הוא שורש עם ריבוי(או כפילות) לפחות 2 ל אם a שורש ל ול (כאשר )

# הגדרה

תת קבוצה נקראת אידאל אם:

1. I סגורה ביחס לחיבור( ⇦ )
2. I סגורה ביחס לכפל בכל פולינום ב( ⇦ )

## דוגמה

1. יהי .
2. ,
3. אידאל ראשי: ,   
   לדוגמה: ,   
    ,

# משפט

כל אידאל ב הוא ראשי: אם איזאל אזי קיים כך ש

הוא פולינום עם מינימלית.

שורשים של פולינומים

# משפט(Gauss)

לכל פולינום עם מקדמים ב יש שורש(ב)

⬄

הוא שדה סגור אלגברי

## תוצאה(ממשפט ביזו)

לכל פולינום f עם יש n שורשים(עם ריבוי) ⬄ כל פולינום מתפרק לגורמים לינאריים: , שורשים(שונים) ו

## הערות

1. אם אז ⬄ ⇦
2. אם אינו סגור אלגברי אז אומרים ש מתפרק לגורמים לינארים(⬄ כל השורשים של f הם ב) אם
3. כל אפשר להציג כ כאשר פולינומים אי-פריקים.  
    סגור אלגברי ⬄ רק פולינומים לינאריים הם אי-פריקים.